

# Condensation de Bose-Einstein et Cohérence Quantique : de la Superfluidité à la Localisation, des Liquides de Fermi aux Supraconducteurs

Philippe Nozières

## 1 Le gaz idéal

$N$  bosons de masse  $m$  dans un volume unité ont une distribution d'équilibre

$$n_k = \frac{1}{\exp\left[\frac{\varepsilon_k - \mu}{T}\right] - 1},$$

où  $\mu$  est le potentiel chimique. En trois dimensions,  $\mu$  s'annule pour une température critique

$$T_c = 3,31 \frac{\hbar^2}{md^2},$$

où  $d = N^{-1/3}$  est la distance moyenne entre particules. En dessous de  $T_c$ , un nombre fini de particules

$$N_o = N \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right]$$

s'accumule dans l'état le plus bas : c'est la condensation de Bose-Einstein. Mais cet état est fragile : rien n'oblige les particules condensées à résider strictement dans le même état quantique. La fragilité est patente si l'on met le condensat en mouvement à la vitesse  $v = \hbar q/m$  en accumulant les particules dans l'état de vecteur d'onde  $q$ . Dans le repère du condensat, les excitations élémentaires ont l'énergie cinétique  $\varepsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2m$ . Ce qui compte est l'énergie dans le repère des parois qui assurent la thermalisation,  $\tilde{\varepsilon}_k = \varepsilon_k - kv$  (invariance galiléenne). Pour avoir un écoulement stable, cette énergie doit être positive ("critère de Landau"), sinon une excitation spontanée crée une dissipation. Il est clair sur la figure 1a que ce n'est pas le cas pour un gaz idéal.

## 2 Le rôle crucial d'une interaction répulsive

A l'ordre le plus bas, une répulsion  $U$  crée une énergie de Hartree  $E_H = \frac{1}{2}UN^2$ , donc un potentiel chimique à température nulle  $\mu = dE_H/dN = UN$ , c'est-à-dire en fin de compte une compressibilité  $d\mu/dN$  finie. Qui dit compressibilité dit vitesse du son  $c$ , c'est-à-dire un spectre d'excitation  $\varepsilon_k = ck$  linéaire à grande longueur d'onde. En couplage faible,  $\varepsilon_k$  interpole entre phonons et particules libres, le crossover correspondant à :

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \approx NU \approx ck.$$

Le critère de Landau prédit alors une vitesse critique pour l'écoulement "superfluide"  $v_c = c$  (Fig. 1b). La réalité de  $^4\text{He}$  est différente, car elle correspond à un couplage très fort (Fig. 1c). Le point essentiel est le rôle crucial d'une interaction répulsive.

On peut arriver à la même conclusion par une route différente, intéressante parce qu'elle pose des questions de fond. Au lieu d'avoir à  $T = 0$  un condensat strictement dans l'état le plus bas, peut-on le *fragmenter* entre deux états 1 et 2, d'énergies arbitrairement voisines dans la limite

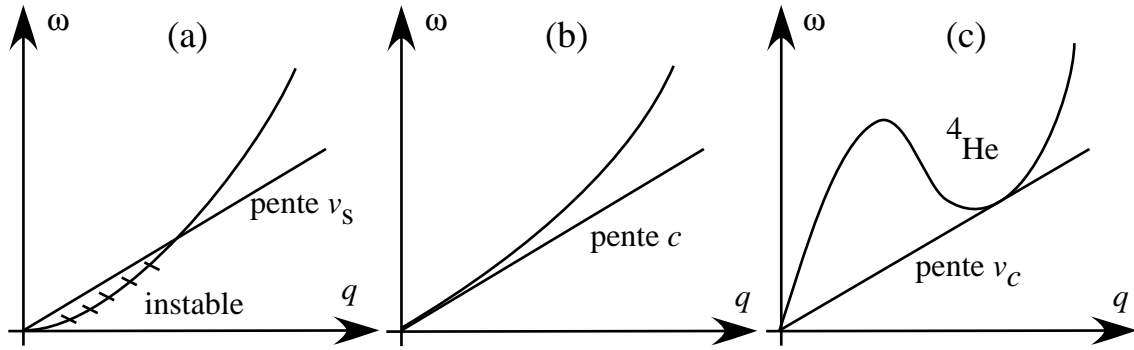


FIG. 1 – Spectre d'excitation : (a) gaz parfait, (b) gaz de bosons en interaction répulsive faible, (c)  ${}^4\text{He}$  liquide.

thermodynamique, avec des populations  $N_1$  et  $N_2 = N - N_1$ ? Seule l'énergie potentielle peut différencier ces deux choix! Écrivons l'interaction à l'aide d'opérateurs création et annihilation

$$\frac{1}{2} \sum_{qkk'} U_q b_k^* b_{k'}^* b_{k'-q} b_{k+q} .$$

Dans l'état non fragmenté, tous les  $k$  sont les mêmes et l'énergie n'a qu'un seul terme  $U_o N(N-1)/2$ . Dans l'état fragmenté, en revanche, l'interaction entre les composantes  $N_1$  et  $N_2$  contient deux termes, l'énergie de Hartree où l'on contracte les opérateurs 1,4 d'une part, 2,3 de l'autre, et l'énergie d'échange de Fock où l'on contracte les opérateurs 1,3 et 2,4. Alors que pour des fermions l'énergie d'échange s'oppose à l'énergie de Hartree ("trou d'échange dû au principe d'exclusion), elle s'ajoute pour des bosons. Le terme de Hartree fait intervenir  $U_o$  et reproduit exactement l'énergie du condensat non fragmenté. La fragmentation coûte donc en fin de compte l'énergie de Fock  $UN_1N_2$ . C'est une énergie *extensive*, significative dans la limite thermodynamique. C'est la répulsion coulombienne qui interdit la fragmentation, assurant ainsi la *cohérence quantique du condensat*, dont la fonction d'onde devient une observable macroscopique.

Qu'arrive-t-il alors si l'interaction est attractive et non répulsive? La question est de pure sémantique pour un système uniforme, car un gaz de bosons attractif s'effondre spontanément. L'énergie de Hartree  $-\frac{1}{2}|U|N^2$  fournit une borne variationnelle supérieure à l'énergie fondamentale, qui tend donc vers  $-\infty$  aux grands  $N$ . La situation est différente pour un gaz dilué piégé dans un puits harmonique, dont l'énergie contient 3 termes, localisation, piégeage mesuré par le rayon du fondamental harmonique  $a_o$  et interaction mesurée par la longueur de diffusion  $a$  :

$$\frac{E}{N} = \frac{\hbar^2}{mR^2} + \frac{m\omega_o^2 R^2}{2} - \frac{|U|}{R^3}$$

( $R$  est le rayon de la "goutte" de  $N$  bosons). Pour des valeurs suffisamment faibles de  $Na/a_o$  il existe une plage de métastabilité. Que devient alors le condensat cohérent? Le problème ne se pose pas pour un système au repos, puisque le fondamental harmonique est non dégénéré. Il existe en revanche pour un système en rotation dans un puits isotrope. Un calcul approché de Gunn et al. suggère une fragmentation spontanée. Bien qu'un peu ésotérique, le problème mérite une étude plus sérieuse, car il pose une question de fond : *la cohérence quantique est elle une fatalité?*

### 3 Cohérence quantique, blocage de phase, rupture de symétrie

La phase absolue  $S$  d'une fonction d'onde est arbitraire, mais sa variation d'un point à l'autre est parfaitement définie. Dès lors qu'un condensat est dans un état pur, cette phase acquiert une rigidité. C'est le cas par exemple d'un système séparé en deux compartiments par une barrière tunnel (jonction "Josephson"). C'est le cas aussi d'un système ouvert parcouru par un courant : c'est le *gradient de phase* qui est responsable du courant. L'énergie  $\frac{1}{2}\Lambda(\nabla S)^2$  définit une raideur

de phase  $\Lambda$  : la densité de courant est  $\mathbf{J} = \Lambda \nabla S$ . Un corollaire immédiat est la quantification de la circulation dans un circuit fermé : la phase doit satisfaire la condition  $\oint \nabla S \cdot d\mathbf{l} = 2\pi p$ , où  $p$  est un entier. Un courant devient ainsi un objet topologique, indifférent aux impuretés ou autres défauts - d'où la superfluidité. Au niveau local, cette quantification agit sur la vorticité : les tourbillons ont des énergies discrètes (qui en fait contrôlent les courants critiques, très inférieurs aux valeurs prédites par le critère de Landau).

On montre facilement que la phase de la fonction d'onde est une quantité conjuguée canonique du nombre de particules. C'est une notion familière en optique : pour bloquer la phase d'un laser, il faut laisser fluctuer le nombre de photons. Cette conjugaison implique une relation d'incertitude  $\Delta N \cdot \Delta S \approx 1$ . Un   tat pur cohérent verrouille la phase, et doit donc permettre de grandes variations  $\Delta N$ , typiquement  $\approx \sqrt{N}$ . La condensation de Bose-Einstein traditionnelle est donc une condition *nécessaire* pour la superfluidité, mais *pas suffisante* : l'exemple du gaz attractif en est une démonstration. Notons que la rigidité de la phase correspond à une rupture de symétrie, tout comme l'existence d'une aimantation spontanée dans un ferromagnétique. En l'absence d'anisotropie cristalline, l'orientation de l'aimantation est arbitraire, mais elle est la même partout. Il en est de même ici.

La notion de cohérence quantique s'enrichit considérablement lorsque les bosons sont dotés d'un degré de liberté interne  $\alpha$ . Le condensat peut alors correspondre à un état quantique interne pur, ou à un mélange statistique incohérent. La population  $N_o$  est remplacée par une matrice densité

$$\rho_{\alpha\beta} = \langle b_{o\alpha}^* b_{o\beta} \rangle .$$

Pour un état pur,  $\rho$  possède une seule valeur propre non nulle  $N_o$ . Les conséquences d'une cohérence interne sont spectaculaires, puisque l'état interne devient une observable macroscopique. L'exemple standard est  $^3\text{He}$  superfluide, où des paires d'atomes condensent dans un même   tat  $L = 1$ ,  $S = 1$ . Du fait de la cohérence, une faible perturbation comme le couplage dipolaire magnétique entre spins nucléaires intervient au premier ordre et devient un facteur déterminant de la résonance magnétique : le comportement qui en résulte est d'une extrême richesse. De même, l'hydrogène atomique possède un spin nucléaire  $1/2$  : un condensat cohérent implique un ferromagnétisme nucléaire. Un autre exemple est celui des excitons,   tats liés d'une paire électron-trou dans un semiconducteur. Si la bande de valence est de symétrie  $p$  et celle de conduction de symétrie  $s$ , l'exciton possède un moment dipolaire électrique : la cohérence interne aligne ces moments, d'où superradiance. La cohérence interne d'un condensat de Bose est donc un facteur essentiel. Mais il n'est pas évident qu'elle soit la règle ! En principe, c'est la répulsion d'échange qui s'oppose à la fragmentation - mais pour une interaction scalaire, il n'y a pas d'échange entre des particules de "spins" différents. Seule une interaction faisant intervenir les degrés de liberté internes peut jouer un rôle. Pour l'instant, il n'existe pas d'argument général excluant l'éventualité d'un mélange statistique. Un exemple en est fourni par un article oublié de Gor'kov et Galitski (1962) qui construisait un état isotrope de  $^3\text{He}$  superfluide sur cette base. L'expérience a infirmé ce modèle - mais il n'est pas inconcevable. Cette question de cohérence interne reste donc ouverte : elle est importante au plan conceptuel.

#### 4 Gaz dilué : longueur de corrélation, fluctuations quantiques

L'interaction dans le canal  $s$  à faible énergie est caractérisée par une longueur de diffusion  $a$ , positive pour une répulsion  $U \delta(r)$ , donnée par :

$$U = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} .$$

La force du couplage est mesurée par le paramètre sans dimension  $Na^3$ . La longueur de corrélation  $\xi$  est l'échelle pour laquelle énergie cinétique de localisation et énergie d'interaction sont comparables :

$$\frac{\hbar^2}{m\xi^2} \approx NU .$$

Elle correspond au passage d'un régime "phonons" (petits  $q$ ) aux particules libres (grands  $q$ ).  $\xi \approx \hbar/\sqrt{mNU}$  est donc *grand* aux faibles couplages : une approximation de champ moyen est satisfaisante. Notons que  $a/\xi$  est  $\approx \sqrt{Na^3}$  : le vrai paramètre du développement est la racine carrée de  $Na^3$ .

Même à température nulle, les fluctuations quantiques suffisent à exciter virtuellement des particules hors du condensat. Au premier ordre, l'interaction  $U$  peut prendre deux atomes condensés et en faire une paire  $(q, -q)$  : on dit qu'il y a "dépletion" du condensat. La théorie microscopique pour un système dilué a été établie par Bogoliubov il y a plus de 50 ans, et peut se formuler très simplement dans un cadre variationnel. Un condensat sans dépletion est décrit par le vecteur d'état :

$$|\Psi\rangle = \exp(\phi b_o^*) |\text{vac}\rangle ,$$

qui incorpore le blocage de la phase (via l'argument de  $\phi$ ) et les fluctuations de  $N_o$  afférentes. Pour tenir compte des fluctuations quantiques à l'ordre le plus bas, il suffit d'écrire :

$$|\Psi\rangle = \exp\left(\phi b_o^* + \sum_q \lambda_q b_q^* b_{-q}^*\right) |\text{vac}\rangle .$$

On obtient  $\lambda_q$  en minimisant l'énergie. On retrouve ainsi les excitations élémentaires de Bogoliubov :

$$\varepsilon_q = \hbar q \sqrt{\frac{NU}{m} + \frac{\hbar^2 q^2}{4m^2}} ,$$

ainsi que l'énergie fondamentale et la dépletion

$$\begin{aligned} E_o &= \frac{2\pi\hbar^2 a N^2}{m} \left[ 1 + \frac{128}{15\sqrt{\pi}} \sqrt{Na^3} \right] , \\ N_o &= N \left[ 1 - \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{Na^3} \right] . \end{aligned}$$

Comme prévu, le développement est en puissances de  $\sqrt{Na^3}$ . Pour la petite histoire, ce résultat est à comparer avec un calcul célèbre d'Onsager et Penrose en 1956. L'ordre superfluide se traduit par une moyenne non nulle  $\langle \psi^*(\mathbf{r}) \rangle$  de l'opérateur de création (c'est le paramètre d'ordre de la transition).  $N_o$  est alors la valeur limite de la matrice densité  $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  aux grandes séparations  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ . C'est la première apparition du concept central "d'ordre non diagonal à longue portée". Cette matrice densité se déduit de la fonction d'onde à  $N$  corps  $\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  :

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \iint d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_N \Psi^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \Psi(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) .$$

Si on prend  $\Psi = 0$  lorsque deux particules se recouvrent et 1 ailleurs, cette intégrale est la même que la fonction de partition d'un gaz classique, que l'on connaît par le développement du viriel. On trouve ainsi

$$\frac{N_o}{N} = 1 - \frac{4\pi}{3} Na^3 + \dots$$

en désaccord avec le calcul de Bogoliubov : où est l'erreur ? Elle se situe dans le choix de la fonction d'onde : une discontinuité pour  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = 2a$  coûte une énergie cinétique infinie ! En fait, la fonction d'onde s'annule au contact, passant par un maximum à mi-distance. La dépletion est ainsi renforcée - d'où le résultat de Bogoliubov !

## 5 Condensation de Bose-Einstein en couplage fort

Nous avons déjà vu que le spectre d'excitation mesuré dans  $^4\text{He}$  (par diffusion inélastique de neutrons), ne ressemblait en rien au résultat de Bogoliubov. La vitesse du son est grande,  $\varepsilon_q$  passe par un maximum avec un creux très marqué de rotons. La longueur de corrélation  $\xi$  est d'échelle atomique, comparable à la longueur de diffusion  $a$  : le couplage est très fort. La nature des rotons

reste mystérieuse. Dans l'esprit de Landau et de Feynman ils traduisent une vorticité sous jacente du liquide. Feynman a la belle formule "a roton is the ghost of a vanishing vortex ring" : les efforts pour décrire l'effondrement d'un petit anneau de tourbillon dont le rayon  $R$  est d'ordre  $\xi$  restent vains pour l'instant. Je ne sais même pas si la symétrie autorise la désintégration en un ou plusieurs rotons. Je crois personnellement que le roton est mieux vu comme le souvenir d'un ordre cristallin. Si ce réseau était gel  , on aurait un phonon d'énergie nulle aux taches de Bragg. On peut imaginer que des fluctuations quantiques cohérentes rétablissent l'invariance translationnelle, brouillant le réseau réciproque. L'énergie  $\varepsilon_q$  ne s'annule plus pour  $q = G$ , mais elle peut présenter un minimum accusé - le roton ! De nouveau, cette question est un peu sémantique, mais elle mérite réflexion.

En couplage fort, la dépletion du condensat  $N_o/N$  doit devenir considérable. En principe, on peut la mesurer par diffusion Compton de neutrons de haute énergie (dans "l'impulse approximation"), mais les interactions dans l'état final élargissent les spectres et une mesure précise est difficile. En gros, on obtient  $N_o/N \approx 0,08$  à la pression de vapeur : la dépletion est énorme. Attention : cela n'infirmes rien le modèle à deux fluides, et la densité superfluide    température nulle reste  $N$  ! Les fluctuations quantiques sont grandes, mais elles sont verrouillées au condensat. Si ce dernier a un vecteur d'onde  $q$ , toute la distribution  $n_k$  est décalée de  $q$ . Le courant superfluide reste donc  $J = N\hbar q/m$ .

$N_o/N$  diminue avec la pression. A l'équilibre thermodynamique, on ne peut pas dépasser la pression de solidification 25 bars. Mais les techniques acoustiques de Sébastien Balibar permettent d'atteindre en régime transitoire des pressions beaucoup plus élevées - d'où une nouvelle question : la dépletion peut-elle atteindre 100% ? Autrement dit, existe-t-il un liquide de Bose *normal*, sans rupture de symétrie ? Si un tel état existe, nous n'en avons aucune description microscopique. Mais on peut comprendre sa signification indirectement par un argument très ancien de Matsubara (dans les années 40). Cet argument concerne un gaz de bosons sur réseau, avec une amplitude de saut  $t$  d'un site au voisin qui fournit l'énergie cinétique. On suppose que ces bosons ont un *cœur dur* : chaque site n'a que deux   tats,  $n_i = 0$  ou 1. La statistique de Bose-Einstein implique des relations de commutation entre deux sites : c'est exactement l'algèbre d'un ensemble de spins 1/2. La densité de particules fixe l'aimantation  $M_z$ . Les opérateurs  $b_i$  et  $b_i^*$  sont les opérateurs de transition des spins  $S_i^-$  et  $S_i^+$ , l'énergie cinétique  $b_i^*b_j$  est un couplage ferromagnétique transverse entre deux spins voisins. Imaginons un réseau demi plein ( $M_z = 0$ ). L'  tat superfluide est isomorphe au ferromagnétisme transverse, la phase du paramètre d'ordre étant l'azimuth de l'aimantation. Un gaz de bosons normal devrait correspondre à un fondamental magnétique isotrope, invariant par rotation des spins, c'est-à-dire à un singulet. On peut facilement réaliser un tel état en dim  risant deux spins voisins en un   tat  $S_1 + S_2 = 0$  - mais on casse alors la symétrie de translation, comme on le ferait pour un réseau cristallin correspondant à un ordre antiferromagnétique des spins ( $n_i = 1$  sur un sous réseau, 0 sur l'autre). Un   tat invariant par translation est ce qu'Anderson a appelé l'  tat "RVB", célèbre de nos jours. Peut-on le réaliser sans corrélation de portée infinie ? J'en doute ! L'existence d'un liquide de Bose normal n'est donc pas une question innocente. Toute information expérimentale sur l'hélium à très haute pression serait précieuse.

## 6 Condensation de Bose-Einstein ou localisation ?

Le problème est patent pour  $^4\text{He}$  : si on augmente la pression, le liquide superfluide devient un cristal à 25 bars (Fig. 2). Ce solide est très plastique, mais il a tous les attributs d'un milieu élastique, résistant au cisaillement. Pour situer la transition, il suffit de remarquer que la superfluidité optimise l'énergie cinétique aux dépens de l'énergie de répulsion (la non localisation implique une certaine proximité), alors que la cristallisation fait l'inverse (les atomes s'évitent, mais on paie en énergie cinétique de localisation). La transition doit correspondre à des énergies comparables :

$$\frac{\hbar^2}{md^2} \approx NU ,$$

où  $d$  est la distance moyenne entre atomes. Le solide doit donc apparaître si  $d \lesssim \xi$ , la longueur de corrélation, c'est-à-dire en couplage fort. Mais le couplage doit être très fort, puisque le liquide correspond d  j à une dépletion considérable. Cette compétition entre superfluidité et localisation se

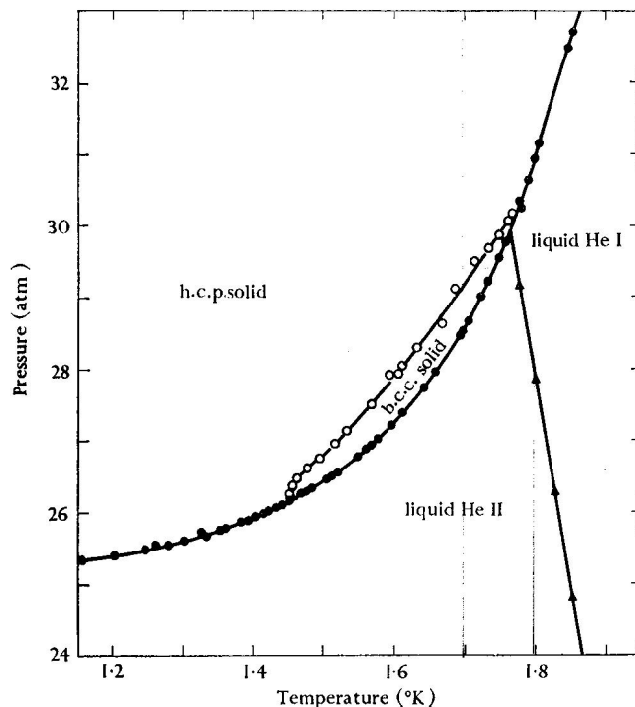
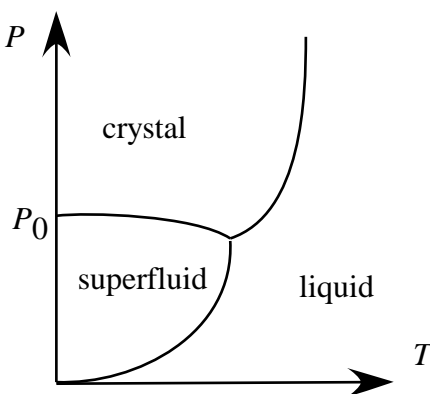
FIG. 2 – Diagramme de phase de  ${}^4\text{He}$ .

FIG. 3 – Diagramme de phase obtenu dans le modèle de Matsubara.

voit aussi dans le modèle de bosons à cœur dur sur un réseau considéré précédemment. L'énergie d'interaction pertinente est alors la répulsion  $V$  entre deux atomes sur des sites voisins : dans le modèle de spins isomorphe, elle correspond à un couplage d'Ising antiferromagnétique :

$$V \left( S_{iz} + \frac{1}{2} \right) \left( S_{jz} + \frac{1}{2} \right) .$$

Pour une bande demi-pleine,  $V$  favorise un arrangement cristallin à deux sous réseaux, alors que le saut tunnel  $t$  favorise le blocage de phase et la superfluidité. C'est ainsi que Matsubara a rendu compte qualitativement du diagramme de phases, par une simple approximation de champ moyen. Son résultat est schématisé sur la Fig. 3.

Sur le plan théorique, on peut modéliser la transition sur un modèle de type Hubbard pour des bosons au lieu des fermions habituels.  $N$  bosons se déplacent sur un réseau de  $N_L$  sites avec

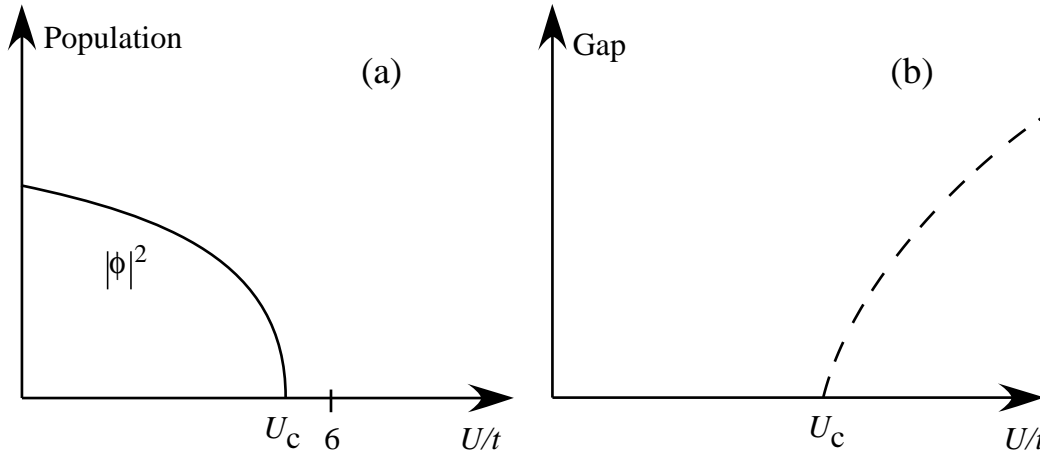


FIG. 4 – Résultats d'un modèle de type Hubbard pour des bosons. (a) Population du condensat. (b) Gap des excitations.

une amplitude de saut  $t$ . Ils sont soumis à une interaction locale  $U$ . L'hamiltonien est donc :

$$H = -t \sum_{i\delta} b_i^* b_{i+\delta} + \frac{U}{2} \sum_i n_i (n_i - 1) .$$

Si  $N$  est un multiple entier  $pN_L$ , il est clair que le système sera isolant aux grands  $U$  : chaque site a une occupation  $p$  et "l'ionisation"  $(p, p) \rightarrow (p+1, p-1)$  coûte une énergie  $U$ . Si  $U$  est petit, en revanche, on retrouve la superfluidité. C'est la version bosonique de la transition isolant-métal (pour un remplissage partiel on a toujours un conducteur).

On peut attaquer ce problème sous deux angles (i) par une adaptation de l'approximation de Gutzwiller [1] (ii) par une approximation de champ moyen inhabituelle [2]. Dans ce dernier cas, on écrit :

$$b_i = \phi + a_i ,$$

où  $\phi = \overline{b_i}$  est le paramètre d'ordre superfluide, et on linéarise en fluctuation  $a_i$ . L'hamiltonien devient local :

$$H = \frac{U}{2} n_i (n_i - 1) - \mu n_i - z t \phi (a_i + a_i^*) ,$$

où  $\mu$  est le potentiel chimique et  $z$  la coordinnence. Il suffit de minimiser par rapport à  $\phi$ . On le fait numériquement en tronquant la série des  $n_i$  à une valeur maximum  $n_{\max}$  que l'on ajuste pour avoir un résultat stable. La Fig. 4a donne la population du condensat  $\rho = |\phi|^2$  en fonction de  $U$  : la superfluidité disparaît à  $U_c$ . La fig. 4b montre le gap des excitations de charge qui apparaît dans la phase isolante.

La discussion précédente concerne la localisation de Mott par les corrélations : on peut aussi avoir localisation d'Anderson par le désordre, qui conduit à un état vitreux sans ordre spatial, mais où le mouvement atomique est bloqué (un remplissage entier n'est plus nécessaire). La théorie de ce "verre de Bose" est beaucoup plus délicate. Elle a été étudiée sous l'angle de la renormalisation par Fisher *et al.* La compétition entre localisations de Mott et d'Anderson est discutée par Trivedi *et al.* Mais cela reste très formel, et à ce stade, nul n'est capable de comprendre comment la superfluidité disparaît dans un milieu poreux dont l'échelle est comparable à la longueur de corrélation  $\xi$ .

Au plan expérimental, l'exemple le plus spectaculaire est la transition directe supraconducteur-isolant dans un matériau granulaire (ou dans un réseau de jonctions Josephson). Au dessous de la température critique de volume, chaque grain peut être vu comme un condensat de Bose-Einstein de paires d'électrons contenant  $N$  paires. Le couplage Josephson tend à verrouiller les phases du paramètre d'ordre de deux grains voisins. Mais l'énergie électrostatique tend à bloquer les fluctuations de charge  $Q$ . Cette énergie capacitive est d'ordre  $Q^2/2R$  où  $R$  est le rayon du

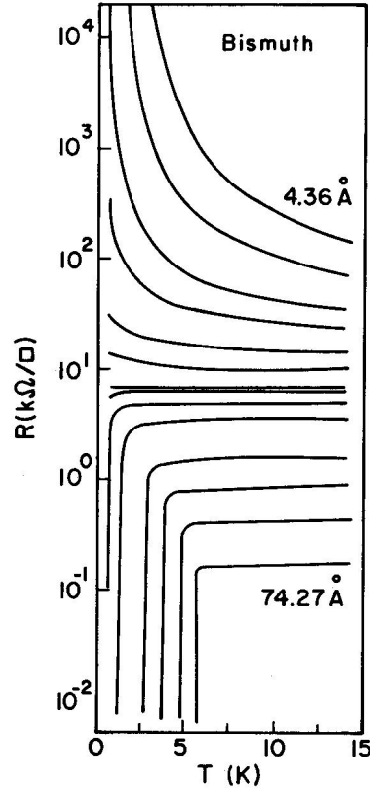


FIG. 5 – Résistance d'un film granulaire de Bismuth en fonction de la température, pour différents rayons  $R$  des grains (figure extraite de [3]).

grain : elle est d'autant plus grande que le grain est petit. Si  $R$  est grand, Josephson gagne et l'on a un supraconducteur, si  $R$  est petit l'électrostatique gagne et l'on a un isolant. Ce comportement est parfaitement illustré sur la Fig. 5 qui donne la résistance d'un film granulaire de bismuth en fonction de la température  $T$  pour différentes valeurs de  $R$  : le passage brutal du superfluide à l'isolant est spectaculaire. Les condensats de Bose d'atomes piégés viennent de fournir un exemple encore plus beau. On fabrique un réseau de pièges par une onde stationnaire de deux faisceaux laser tête bêche. L'intensité du laser contrôle la hauteur des barrières, c'est à dire l'amplitude tunnel d'un puits au voisin. Dans l'état superfluide, les phases sont cohérentes d'un puits à l'autre : on observe des taches de Bragg lorsqu'on libère les atomes en supprimant le piégeage. Ces deux expériences fournissent un exemple concret du modèle de Hubbard bosonique.

## 7 Un problème ouvert : la cinétique de condensation

Considérons un gaz de bosons à une température  $T_o > T_c$ . On trempe le thermostat brutalement à une température  $T < T_c$  : comment le condensat se forme-t-il ? Ici encore la réponse est très différente pour un gaz idéal et pour un gaz répulsif. On peut modéliser le thermostat par une probabilité de transition  $W_{kk'}$  qui obéit au principe du bilan détaillé :

$$\frac{W_{kk'}}{W_{k'k}} = \exp \left[ \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k'}}{T} \right] .$$



La distribution  $n_k$  est alors régie par une équation maîtresse du type :

$$\frac{dn_k}{dt} = \sum_{k'} [W_{k'k} n_{k'} - W_{kk'} n_k] .$$

L'échelle de temps est un temps de collision  $\tau \approx 1/W$ .

Pour un gaz idéal, on montre facilement que quelques collisions suffisent à préfigurer le condensat : un nombre  $N_o$  de particules se rassemble dans une gamme d'énergie étroite  $\delta(t)$ . Reste à faire décroître  $\delta$  pour atteindre un état unique! Mais alors les collisions deviennent totalement inefficaces, car l'asymétrie de la distribution de Boltzmann est de plus en plus faible. On peut montrer que  $\delta(t)$  décroît comme  $1/t$  : pour un système macroscopique, il faut un temps infini pour réaliser un condensat cohérent.

La situation est complètement différente en présence d'une répulsion d'échange. Dès qu'il existe une population  $N_o$  finie, l'addition d'un atome audit condensat change l'énergie d'échange d'une quantité *finie*, détruisant la compensation entre les collisions "in" et "out". La relaxation vers l'état d'équilibre se fait en quelques collisions. La situation est très semblable à celle d'un ferromagnétique, où la relaxation d'aimantation est due à des collisions qui renversent le spin,  $k_\downarrow \Rightarrow k'_\uparrow$ . Dans l'état paramagnétique instable, une telle transition est impossible à  $T = 0$  (les niveaux de Fermi des deux spins coïncident). En revanche si l'on a nucléé une petite aimantation, l'énergie d'échange sépare  $\mu_\uparrow$  et  $\mu_\downarrow$ , une fenêtre de collision s'ouvre et la relaxation est rapide, en quelques collisions. Dans un cas comme dans l'autre, le seul problème est la nucléation initiale : on retrouve le problème classique de la décomposition spinodale, commun à toutes les transitions de phase. Cette nucléation part nécessairement d'un germe localisé, ce qui suppose une énergie de paroi, donc une longueur de corrélation finie. De nouveau les interactions jouent un rôle crucial.

En pratique, cette formation du condensat semble très rapide et la question n'a guère d'incidence concrète. Il serait néanmoins intéressant de comprendre ce problème et d'observer cette cinétique expérimentalement.

## 8 Deux fermions liés = un boson ?

L'existence de la supraconductivité et de  $^3\text{He}$  superfluide montre bien que la réponse est "oui" - jusqu'à un certain point! Imaginons deux fermions qui s'attirent suffisamment pour former un état lié, par exemple singulet de spin. Soit  $\psi_k$  la fonction d'onde interne, d'extension  $a$  dans l'espace réel,  $1/a$  dans l'espace réciproque. L'énergie de liaison est  $\varepsilon_o \approx \hbar^2/ma^2$ . Si le centre de masse a un moment  $q = 0$ , l'opérateur création de cette paire liée s'écrit :

$$b_o^* = \sum_k \psi_k c_{k\uparrow}^* c_{-k\downarrow}^*$$

( $c^*$  est l'opérateur création d'un fermion). Si la distance  $d$  entre paires est très supérieure à  $a$ , chaque paire ignore sa voisine et l'on doit pouvoir la traiter comme un boson ponctuel (la statistique n'intervient pas dès lors que les fonctions d'onde ne se recouvrent pas). A l'ordre le plus bas (Hartree et non pas Bogoliubov!), le fondamental a donc un vecteur d'état :

$$|\Psi\rangle = \exp[\phi b_o^*] |\text{vac}\rangle .$$

Les paires  $(k, -k)$  commutent entre elles, l'exponentielle se factorise. On peut développer chaque facteur en série : du fait du principe d'exclusion, seuls survivent les deux premiers termes. Après normalisation,  $|\Psi\rangle$  prend la forme :

$$|\Psi\rangle = \prod_k [u_k + v_k c_{k\uparrow}^* c_{-k\downarrow}^*] |\text{vac}\rangle$$

avec  $v/u = \phi\psi_k$ . On retrouve immédiatement la fonction d'onde de BCS! La population de l'état de fermion sous jacent est  $v_k^2$  : le principe d'exclusion lui impose d'être  $\leq 1$ .

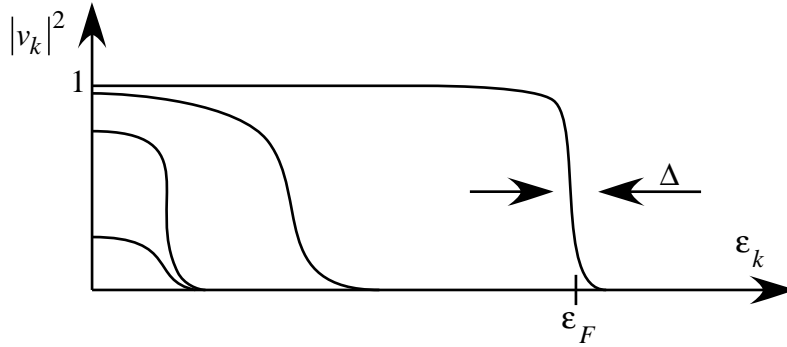


FIG. 6 – Population  $|v_k|^2$  en fonction de l'énergie  $\epsilon_k$ .

Dans la limite diluée  $\phi \approx \sqrt{N}$ ,  $\psi_k \approx a^{3/2}$  :  $v_k^2$  est d'ordre  $Na^3 \approx a^3/d^3 \ll 1$  : aucun problème donc avec le principe d'exclusion.  $v_k$  reflète la fonction d'onde atomique, le "gap"  $\epsilon_o$  pour casser une paire n'a rien à voir avec la condensation de Bose-Einstein. Si en revanche  $Na^3$  dépasse 1, la répulsion d'échange entre fermions devient déterminante. La population  $v_k^2$  se déforme comme l'indique la Fig. 6. Elle peut conserver un gap  $\Delta$  fini, sans discontinuité au niveau de Fermi : c'est l'état supraconducteur de BCS, où  $\Delta$  est dû à la rupture de symétrie superfluide, contrairement au cas dilué. Elle peut aussi évoluer vers une marche d'escalier discontinue : c'est le liquide de Fermi standard, sans aucune rupture de symétrie. Pour le gaz d'électrons habituel, la supraconductivité existe pour une interaction attractive arbitrairement faible ( $\Delta$  est alors exponentiellement petit). Mais il existe des situations plus compliquées, par exemple des excitons où l'on apparie un électron et un trou. En général, les surfaces de Fermi des deux bandes sont anisotropes et différentes l'une de l'autre : il faut alors une interaction minimum pour fabriquer un état superfluide (sinon on a un simple plasma normal de porteurs libres).

La conclusion est donc que l'on interpole continûment entre condensation de Bose-Einstein de paires préformées (attraction forte) et supraconductivité BCS (attraction faible). Mais la physique est qualitativement différente dans les deux limites. C'est particulièrement clair si l'on regarde la température critique  $T_c$  à laquelle la rupture de symétrie disparaît. En régime BCS,  $T_c$  est contrôlé par la *rupture des paires*, qui n'existent qu'à cause de l'ordre superfluide :  $T_c$  est donc  $\approx \Delta$ . En régime atomique, la liaison est forte et on ne casse pas les paires :  $T_c$  est dû à leur mouvement de centre de masse, qui vide le condensat au profit d'un fluide normal. Si on remarque que ce fluide normal correspond à une fluctuation thermique de la phase du paramètre d'ordre, on voit apparaître un mécanisme de destruction de la superfluidité nouveau, échappant entièrement à toute description de champ moyen. Une description précise de la région de transition reste problématique. On peut montrer en 2 dimensions que les deux mécanismes donnent des  $T_c$  comparables lorsque  $\Delta \approx E_F/5$  : la notion d'état lié n'a alors aucun sens et les théories actuelles sont impuissantes.

Une dernière précaution oratoire s'impose : la discussion précédente ne concernait que la répulsion d'échange, due au principe d'exclusion. Elle ignore un autre phénomène tout aussi important, *l'effet d'écran*, qui réduit la force de l'attraction. L'effet d'écran de type Debye-Huckel est bien compris dans la limite dense. Lorsque l'on passe au régime dilué, il doit évoluer vers une attraction de van der Waals. Malgré 50 ans d'efforts, il n'existe aucune théorie fiable de la région intermédiaire, traitant de façon self consistente appariement et effet d'écran. C'est l'un des grands défis des corrélations fortes.

## 9 Conclusion

Ce bref survol montre que la condensation de Bose-Einstein est bien vivante. Elle s'est bien enrichie depuis la découverte initiale de Bose. Il faut admirer l'intuition extraordinaire de Fritz London qui a compris dès 1937 la nature essentiellement quantique du phénomène, et ce malgré l'opposition virulente de grands savants comme Landau. Cette cohérence quantique interne est

toute la richesse de ce domaine. Elle était peu visible dans  $^4\text{He}$ , elle devient omniprésente dans les gaz ultrafroids piégés. Il reste beaucoup de questions pendantes à éclaircir : l'expérience saura-t-elle y répondre ?

### Références

- [1] W. Krauth *et al.*, *Phys.Rev. B* **45**, 3137 (1992).
- [2] Sheshari *et al.*, *Eur. Phys. Lett.* **22**, 257 (1993).
- [3] Haviland *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2180 (1989).

Philippe Nozières  
CNRS-LEPES  
Grenoble